XXI Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2018

1. (3 puntos). Demostrar que la cantidad de soluciones en enteros positivos de la ecuación $(a+b)(a+c) = abc$ es finita.

2. (3 puntos). Sea G un grafo conexo con n vértices y P un camino en G de longitud k, suponga que G no contiene un camino de longitud mayor a k. Sea $Y = V(G) \backslash V(P)$ y sea $v \in Y$ un vértice adyacente a s vértices de P con $s \geq 1$, y suponga que el camino más largo usando solo los vértices de Y y empezando en v tiene longitud p. Pruebe que $s + p \leq k/2$.

   Nota: Un camino de longitud k en un grafo es una sucesión de $k+1$ vértices distintos $v_0, v_1, \ldots, v_k$ tales que para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, los vértices v_{i-1} y v_i son adyacentes.

3. (4 puntos). Determinar todos los vectores $u \in \mathbf{Z}^2$ para los que la recta $u \cdot v = 1$ interseca a algún círculo $\|v\| = r$ en dos puntos con coordenadas enteras.

4. (5 puntos). Determinar todas las funciones $f : (0,1) \to (0, +\infty)$ en $C^2(0,1)$, tales que todas las rectas tangentes a la curva intersecan a los semiejes positivos y determinan segmentos de longitud 1.

5. (6 puntos). Sea p un número primo. Demostrar que existen infinitos enteros positivos n tales que el sistema de ecuaciones

$$a_2 = 4a_1, \quad a_1 + a_3 = 4a_2, \quad \ldots \quad , \quad a_{n-2} + a_n = 4a_{n-1}, \quad a_{n-1} = 4a_n,$$

   sobre $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, admite al menos una solución con $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, no todos nulos.

6. (7 puntos). Considere la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}$ definida por $F_1 = F_2 = 1$ y $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ para $n \geq 1$. Sea p un polinomio trigonométrico finito de la forma

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi F_{2n} x),$$

   con $a_i \in \mathbb{C}$. Demostrar que si $\int_0^1 |p(x)|^2 dx \leq 1$, entonces $\int_0^1 |p(x)|^4 dx < 3$.

7. (7 puntos). Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales tal que

$$\text{grado}(p) \leq 2018, \quad \text{y} \quad \left|p(x)\right| \leq \frac{1}{\left|x - \sqrt{3}\right|} \quad \text{para } x \in [-2, 2].$$

Probar que

$$\left|p\left(\sqrt{3}\right)\right| \leq 2019\,.$$