XXI Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria 2018

1. (3 puntos). Demostrar que la cantidad de soluciones en enteros positivos de la ecuación $(a+b)(a+c) = abc$ es finita.

Solución Empezamos por reescribir la ecuación como

$$bc = a(bc - a - b - c).$$

Si denotamos $d := bc - a - b - c > 0$, entonces podemos reescribir esto como

$$a + b + c + d = ad = bc.$$

Como la ecuación es simétrica podemos suponer sin pérdida de generalidad que $d = \text{mín}\{a, b, c, d\}$, de manera que $a = bc/d \geq \text{máx}\{b, c\}$, es decir, $a = \text{máx}\{a, b, c, d\}$. Es claro que $d \neq 1$, pues $b + c > 0$, por lo que $d \geq 2$. Tenemos también que $ad = a + b + c + d \leq 4a$, por lo que $d \leq 4$. Reescribimos la ecuación como $b + c + d = a(d-1)$ y obtenemos que

$$a = \frac{b+c+d}{d-1}, \quad bc = a + b + c + d = \frac{b+c+d}{d-1} + (b+c+d) = \frac{d(b+c+d)}{d-1}.$$

Multiplicando la última ecuación por $(d-1)^2$ y reordenando obtenemos que

$$((d-1)b - d)((d-1)c - d) = d^3.$$

Para $2 \leq d \leq 4$ esta ecuación admite una cantidad finita de soluciones para $\{b, c\}$, de donde se concluye que la cantidad de soluciones es finita.

Criterio de calificación del problema 1

a) Llevar a cabo factorizaciones útiles **(1 punto).**

b) Obtener cotas **(1 punto).**

c) Concluir correctamente **(1 punto).**

2. (3 puntos). Sea G un grafo conexo con n vértices y P un camino en G de longitud k, suponga que G no contiene un camino de longitud mayor a k. Sea $Y = V(G)\backslash V(P)$ y sea $v \in Y$ un vértice adyacente a s vértices de P con $s \geq 1$, y suponga que el camino más largo usando solo los vértices de Y y empezando en v tiene longitud p. Pruebe que $s + p \leq k/2$.

Nota: Un camino de longitud k en un grafo es una sucesión de $k + 1$ vértices distintos $v_0, v_1, \ldots, v_k$ tales que para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, los vértices v_{i-1} y v_i son adyacentes.

Solución Sean $v_0, v_1, \ldots, v_k$ los vértices de P en orden, y sean $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots v_{i_s}$ los vértices de P conectados con v. Nótese que v no puede estar conectado con dos vértices consecutivos de P, v_i, v_{i+1} ya que en este caso se tendría que $v_1, \ldots, v_i, v, v_{i+1}, \ldots, v_k$ sería un camino de longitud $k+1$. Por lo tanto se tiene que $i_j + 2 \leq i_{j+1}$ y por tanto $i_s \geq i_1 + 2s - 2$ $(*)$ Sea Q un camino en Y de longitud p con extremos v y u, entonces el camino que empieza en u conectado con $v_{i_s}, v_{i_s-1}, \ldots, v_0$ tiene longitud $p + 1 + i_s$ y el camino desde u formado al conectar Q con $v_{i_1}, v_{i_1+1}, \ldots, v_k$ tiene longitud $p + k - i_1 + 1$, como G no contiene caminos de longitud mayor a k, tenemos que $p + i_s + 1 \leq k$ y $p + k - i_1 + 1 \leq k$, equivalentemente $i_s \leq k - p - 1$ y $i_1 \geq p + 1$. Combinando con (*) tenemos que $k - p - 1 \geq i_s \geq i_1 + 2s - 2 \geq p + 2s - 1$ y por lo tanto $k \geq 2s + 2p$.

Criterio de calificación del problema 2

a) Establecer la notación adecuada para vértices de P y vértices adyacentes **(1 punto).**

b) Observar que v no puede conectar con dos vértices consecutivos de P **(1 punto).**

c) Establecer las comparaciones (desigualdades) que den el resultado y concluir **(1 punto).**

3. (4 puntos). Determinar todos los vectores $u \in \mathbf{Z}^2$ para los que la recta $u \cdot v = 1$ interseca a algún círculo $\|v\| = r$ en dos puntos con coordenadas enteras.

Solución Sea $u = (a, b)$. Para que la recta contenga puntos enteros necesitamos que a, b sean coprimos. Por lo tanto deben existir (c, d) tales que $ac + bd = 1$, y los puntos enteros de la recta $u \cdot v = 1$ se pueden describir también por la parametrización $v = (c + bm, d - am)$ con $m \in \mathbf{Z}$. Si esta recta interseca a un círculo en dos puntos tenemos que

$$(c + bm)^2 + (d - am)^2 = (c + bn)^2 + (d - an)^2,$$

para algún par de enteros distintos m, n. Luego de reacomodar y dividir por $m - n$ obtenemos que

$$(a^2 + b^2)(m + n) = 2(ad - bc).$$

Tenemos que $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = 1 + (ad - bc)^2$, es decir, $a^2 + b^2$ y $ad - bc$ son coprimos. Por lo tanto $a^2 + b^2$ divide a 2. En este caso es claro que existen soluciones a la ecuación anterior y por lo tanto círculos cuya intersección con la recta consiste en dos puntos con coordenadas enteras.

Concluimos que los posibles vectores u son $\pm\{(1, 0), (0, 1), (1, 1), (1, -1)\}$.

Criterio de calificación del problema 3

a) Establecer que las coordenadas de u deben ser primos relativos **(1 punto).**

b) Obtener parametrización de los puntos de la recta **(1 punto).**

c) Obtener la ecuación de los dos puntos con coordenadas enteras distintas **(1 punto).**

d) Obtener el resultado **(1 punto.)**

4. (5 puntos). Determinar todas las funciones $f:(0,1)\to(0,+\infty)$ en $C^2(0,1)$, tales que todas las rectas tangentes a la curva intersecan a los semiejes positivos y determinan segmentos de longitud 1.

Solución La ecuación de la recta tangente en $(x_0, f(x_0)$ es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

De esto se sigue que las intersecciones con los ejes son

$$\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, 0\right), \quad (0, f(x_0) - x_0 f'(x_0)).$$

Sea $\theta(x)\in(0,\pi/2)$ el ángulo entre la recta tangente por el punto $(x, f(x))$ y el eje x, de manera que

$$\cos\theta = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{xf'(x) - f(x)}{f'(x)}, \quad \sin\theta = f(x) - xf'(x).$$

Esto implica que $f'(x) = -\tan\theta$, de manera que $\theta = -\arctan(f'(x)) \in C^1(0,1)$. Las ecuaciones se convierten en

$$x\sin\theta + f(x)\cos\theta = \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta).$$

Derivando con respecto a x y usando que $f'(x) = -\tan\theta$ se obtiene que

$$(x\cos\theta - f(x)\sin\theta)\frac{d\theta}{dx} = \cos(2\theta)\frac{d\theta}{dx}.$$

Supongamos por el momento que $d\theta/dx \neq 0$ en un intervalo maximal $(a,b)\subseteq(0,1)$. En este caso se tiene el sistema de ecuaciones

$$x\sin\theta + f(x)\cos\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta), \quad x\cos\theta - f(x)\sin\theta = \cos(2\theta).$$

Resolviendo el sistema se obtiene que

$$x = \frac{1}{2}\sin(2\theta)\sin\theta + \cos(2\theta)\cos\theta = \cos^3\theta, \quad f(x) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)\cos\theta - \cos(2\theta)\sin\theta = \sin^3\theta,$$

es decir $f(x) = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ para $x \in (a, b)$. Si $a \neq 0$ entonces $d\theta/dx = 0$ para $x = a$ y si $b \neq 1$ entonces $d\theta/dx = 0$ para $x = b$. Sin embargo, para $x \in (a, b)$ se tiene que

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{-f''(x)}{1 + (f'(x))^2}.$$

La función $(1-x^{2/3})^{3/2}$ es estrictamente convexa en $(0, 1)$, es decir $[(1-x^{2/3})^{3/2}]'' \geq \epsilon_K > 0$ para cualquier compacto $K \subseteq (0, 1)$. De esto se concluye que el intervalo maximal debe ser $(0, 1)$, y así la curva debe ser la astroide $f(x) = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ para todo $x \in (0, 1)$.

Finalmente, si $d\theta/dx = 0$ para algún punto, entonces $d\theta/dx \equiv 0$ para todo $x \in (0, 1)$. Por lo tanto $f''(x) = -\sec^2 \theta d\theta/dx = 0$, es decir f debe ser una función lineal. En tal caso, cualquier función de la forma

$$f(x) = -\tan \theta (x - \cos \theta),$$

satisface las condiciones del problema.

Criterio de calificación del problema 4

a) Encontrar la ecuación de la tangente y las intersecciones con los ejes **(1 punto).**

b) Obtener una formulación matemática de que la longitud del segmento es 1 **(1 punto).**

c) Obtener la ecuación de la astroide **(2 puntos).**

d) Obtener las rectas **(1 punto.)**

5. (6 puntos). Sea p un número primo. Demostrar que existen infinitos enteros positivos n tales que el sistema de ecuaciones

$$a_2 = 4a_1, \quad a_1 + a_3 = 4a_2, \quad \ldots \quad , \quad a_{n-2} + a_n = 4a_{n-1}, \quad a_{n-1} = 4a_n,$$

sobre $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, admite al menos una solución con $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, no todos nulos.

Solución Sea $p_n(x) = \det(xI_n - M_n) \in \mathbf{Z}[x]$ el polinomio característico de la matriz (casi-circulante)

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La existencia de una solución no nula al sistema de ecuaciones, sobre $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, es equivalente a que $p_n(k) \in \mathbf{Z}$ sea divisible por p. Expandiendo el determinante por la primera columna obtenemos que

$$p_n(x) = xp_{n-1}(x) - p_{n-2}(x),$$

con $p_1(x) = x$ y $p_2(x) = x^2 - 1$. Sea $q_n = p_n(k)$, para algún k conveniente, de manera que la sucesión $\{q_n\}$ satisface la recurrencia

$$q_n - kq_{n-1} + q_{n-2} = 0, \tag{1}$$

para $n \geq 3$, con $q_1 = k$ y $q_2 = k^2 - 1$. Es claro que la sucesión de residuos (módulo p) es pre-periódica (es decir, periódica a partir de cierto momento), pues deben haber dos pares congruentes en el conjunto $\{(q_1, q_2), (q_2, q_3), \ldots, (q_{p^2+1}, q_{p^2+2})\}$. Como el coeficiente de q_{n-2} en (1) es 1, entonces la sucesión es "reversible". Esto implica que la sucesión debe ser periódica (no solo pre-periódica) y que tiene una extensión a $\mathbf{Z}$ dada por la recurrencia. La extensión también es periódica. Por lo tanto es suficiente demostrar que existe $n \in \mathbf{Z}$ tal que q_n es divisible por p. Tenemos que $q_0 = 1$ y $q_{-1} = 0$, y así concluye el problema.

Criterio de calificación del problema 5

a) Describir la matriz del sistema de ecuaciones y ya sea el polinomio característico o bien el determinante del sistema **(2 puntos).**

b) Encontrar la ecuación del determinante de forma iterativa **(2 puntos).**

c) Observar que de la ecuación iterativa se puede obtener una iteración que describa $p_n(k)$ (para algún valor adecuado de k), obtener la periodicidad y la reversibilidad de la recurrencia, para que se pueda partir de cero y concluir **(2 puntos).**

6. (7 puntos). Considere la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}$ definida por $F_1 = F_2 = 1$ y $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ para $n \geq 1$. Sea p un polinomio trigonométrico finito de la forma

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi F_{2n} x),$$

con $a_i \in \mathbb{C}$. Demostrar que si $\int_0^1 |p(x)|^2 dx \leq 1$, entonces $\int_0^1 |p(x)|^4 dx < 3$.

Solución Empezamos por reescribir el polinomio trigonométrico como

$$p(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} b_n e^{2\pi i n x},$$

con $b_n = a_N/2$ si $n = \pm F_{2N}$ para algún $N \geq 1$ y $b_n = 0$ en cualquier otro caso. Usando la ortonormalidad del conjunto $\{e^{2\pi i n x}\}$ obtenemos que

$$\int_0^1 |p(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |b_n|^2, \quad \int_0^1 |p(x)|^4 dx = \sum_{j,k,l,m \in \mathbf{Z}} b_j b_k \overline{b_l b_m} \delta_{j+k-l-m}.$$

Los términos que contribuyen a la segunda deben satisfacer que $j = \pm F_{2J}$, $k = \pm F_{2K}$, $l = \pm F_{2L}$ y $m = \pm F_{2M}$, con $j + k - l - m = 0$. Sin embargo, no hay tres términos (pares) de la sucesión de Fibonacci cuya suma sea igual a otro término de la sucesión. Esto implica que la igualdad $j+k-l-m=0$ debe darse en pares, es decir, se debe tener alguno de los casos

$$A := \{j+k = l+m = 0\}, \quad B := \{j-l = m-k = 0\}, \quad C := \{j-m = l-k = 0\}.$$

Tenemos que

$$A\cap B = \{(n,-n,n,-n)\}, \;\; B\cap C = \{(n,n,n,n)\}, \;\; C\cap A = \{(n,-n,-n,n)\}, \;\; A\cap B\cap C = \{(0,0,0,0)\}.$$

Del principio de inclusión-exclusión y la paridad de los coeficientes $\{b_n\}$ se concluye que

$$\begin{aligned}\sum_{j,k,l,m\in\mathbf{Z}} b_j b_k \overline{b_l b_m}\delta_{j+k-l-m} &= \sum_{j,l\in\mathbf{Z}} b_j b_{-j}\overline{b_l b_{-l}} + \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} b_j b_k \overline{b_j b_k} + \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} b_j b_k \overline{b_k b_j}\\ &\quad - \sum_{n\in\mathbf{Z}} b_n b_{-n}\overline{b_n b_{-n}} - \sum_{n\in\mathbf{Z}} b_n b_n \overline{b_n b_n} - \sum_{n\in\mathbf{Z}} b_n b_{-n}\overline{b_{-n} b_n}\\ &= \left|\sum_{n\in\mathbf{Z}} b_n^2\right|^2 + 2\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}} |b_n|^2\right)^2 - 3\sum_{n\in\mathbf{Z}} |b_n|^4 < 3\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}} |b_n|^2\right)^2 \leq 3.\end{aligned}$$

Criterio de calificación del problema 6

a) Escribir la serie de Fourier compleja (en términos de la exponencial) **(1 punto).**

b) Usar la ortogonalidad para obtener la igualdad de los coeficientes que corresponden **(2 puntos).**

c) Usar propiedades de la sucesión de Fibonacci para establecer las igualdades por pares **(2 puntos).**

d) Concluir (Ecuación de las paridades de los coeficientes para obtener la cota) **(2 puntos.)**

7. (7 puntos). Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales tal que

$$\text{grado}(p) \leq 2018, \quad \text{y} \quad \big|p(x)\big| \leq \frac{1}{\big|x-\sqrt{3}\big|} \quad \text{para } x\in[-2,2].$$

Probar que

$$\Big|p\big(\sqrt{3}\big)\Big| \leq 2019\,.$$

Solución Primero construimos un polinomio de referencia $r(x)$ que satisface las condiciones y que $r\big(\sqrt{3}\big) = 2019$.

Denotamos por $T_n(x)$ al n-ésimo polinomio de Chebyshev de primer tipo definido por $T_n(\cos t) = \cos nt$. Sea

$$r(x) = \frac{T_{2019}(x/2)}{x-\sqrt{3}}.$$

Nótese que

$$T_{2019}\big(\sqrt{3}/2\big) = T_{2019}\big(\cos\tfrac{\pi}{6}\big) = \cos\tfrac{2019\pi}{6} = 0$$

por lo que r es de hecho un polinomio. Además,

$$r\big(\sqrt{3}\big) = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{T_{2019}(x/2)}{x-\sqrt{3}} = \lim_{t\to\frac{\pi}{6}} \frac{T_{2019}(\cos t)}{2\cos t-\sqrt{3}} = \lim_{t\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2019t}{2\cos t-\sqrt{3}} = \frac{\sin 2019\frac{\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{6}} = 2019.$$

Supongamos que la concluisión es falsa, sin pérdida de generalidad y, $p(\sqrt{3}) > 2019$. Consideremos los puntos

$$\big\{2 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2019} = 2\big\} = \big\{2\cos\tfrac{i}{2019} : 0 \le i \le 2019\big\} \cup \big\{\sqrt{3}\big\}.$$

Para $x = 2\cos\frac{i}{2019}$ tenemos que $|r(x)| = \frac{1}{|x-\sqrt{3}|} > f(x)$; para $x = \sqrt{3}$ tenemos $p(x) > |r(x)|$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ pequeño, y consideremos el polinomio

$$f(x) = r(x) - (1-\varepsilon)p(x).$$

Si ε es suficientemente pequeño entonces a lo largo de la sucesión $x_0, x_1, \ldots, x_{2019}$ el signo de f es alternante. Pero esto es una contradicción porque grado$(f) \le 2018$.

Criterio de calificación del problema 7

a) Observar que existe un polinomio de referencia $r(x)$ **(1 punto).**

b) Encontrar explícitamente el polinomio de referencia que alcanza $r(\sqrt{3}) = 2019$ **(3 puntos).**

c) Usar el polinomio de referencia para acotar el valor en $\sqrt{3}$ de cualquier otro polinomio que satisfaga las condiciones **(3 punto).**